№10-дәріс

Бір айнымалыға байланысты функцияның дифференциалдық есептеуі. Бір айнымалыға байланысты функцияның туындысының геометриялық және механикалық мағынасы. Туындының кестесі. Дифференциалдау ережелері.

Бір айнымалы функцияның туындысы.

x_0 маңайында, x_0 нүктесін қоса алғанда, $y = f(x)$ функциясы берілсін. x_0 нүктесінде x аргументіне Δx өсімшесін береміз (оң немесе теріс). Онда $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ шегі табылса, онда оны x_0 нүктесіндегі $y = f(x)$ функциясының туындысы деп айтамыз, немесе $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданады деп айтамыз және былай белгілейміз: y' $f'(x)$, y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$, яғни,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Егер (1)-де $\Delta x \to 0$ және $\Delta x > 0$ $[\Delta x < 0]$ болса, онда (1)-ді x_0 нүктесіндегі $f'_{пр}(x_0)$ оң жақ туындысы [$f'_{л}(x_0)$ сол жақ туындысы] деп атаймыз. Егер $\exists f'_{пр}(x_0), f'_{л}(x_0)$ және $f'_{пр} = f'_{л}$ болса, онда $\exists f'(x_0)$.

Анықтама. $y = f(x)$ функциясын $[a;b]$ кесіндісінде дифференциалданады деп айтамыз, егер оның $(a;b)$ аралығындағы әрбір нүктеде туындысы бар болса, ал a және b ұштарында сәйкесінше $f'_{пр}(a)$ және $f'_{л}(b)$ табылса.

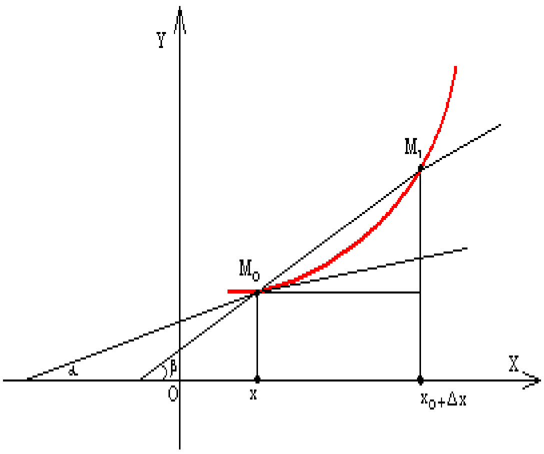
D облысында дифференциалданатын функциялардың класын $C^1(D)$ деп белгілейміз.

Туындының механикалық және геометриялық мағынасы

а) **Механикалық.** $S = S(t)$ - M нүктесінің қозғалу заңы болсын. M нүктесінің t-дан $t + \Delta t$-ға дейінгі аралығындағы қозғалысын қарастыралық. Онда $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$, ал $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ - орташа жылдамдық . Егер

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t)$$

шегі табылса, онда жолдың уақыт бойынша туындысы M нүктесінің t уақыт аралығындағы қозғалысының жылдамдығына тең.



б) **Геометриялық.** $y=f(x)$ қисығында $M_0[x_0;f(x_0)]$ және $M_1[x_0+\Delta x;f(x_0)]$ нүктелерін қарастыралық. $M_0A=\Delta x$, $AM_1=\Delta y$ және $tg\beta=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ екендігі анық. M_1 нүктесін қисықтың бойымен M_0 нүктесіне қарай жылжытамыз. M_1 нүктесінің орналасу аралығын белгілей отырып, $\{M_0M_1\}$ қимасын аламыз. Онда $M_1\to M_0$ болған жағдайда $\Delta x\to 0$ болатыны анық.

Анықтама. M_1 нүктесі қисықтың бойымен M_0 нүктесіне кез келген жағынан шексіз жақындағанда M_0M_1 қимасының M_0T шектелген орны табылса, онда M_0T $y=f(x)$ қисығына x_0 нүктесінде жүргізілген жанама деп аталады.

Е гер қисықтың жанамасы бар болса, онда

$$tg\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}tg\beta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

Бұдан, x_0 нүктесінде дифференциалданатын функцияның осы нүктеде бұрыштық коэффиценті $k=f'(x_0)$ болатын жанамасы бар болады.

Мысал 1. $y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі жанамасының теңдеуін жаз.

а) $y=x^2$, $x_0=1$ $\Rightarrow$ $y(1)=1$. $k=f'(1)$ болғандықтан, жанаманың теңдеуі $y-1=f'(1)(x-1)$. $f'(x)$-ті табалық:

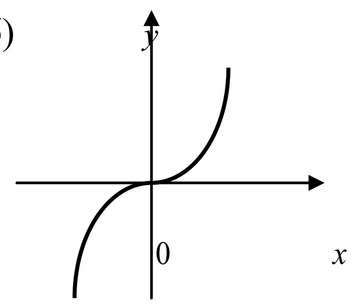
$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2x+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=2x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=2x^2\Rightarrow f'(1)=2\Rightarrow y-1=2(x-1)\Rightarrow 2x-y-1=0.$$

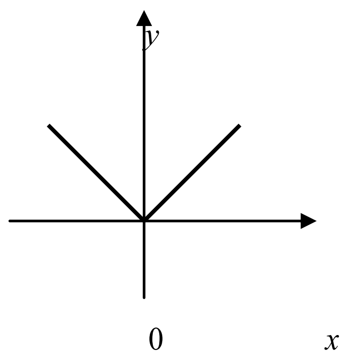
б) $y=x^3$, $x_0=0$ $\Rightarrow$ $y(0)=0$. $(x^3)'=3x^2$ болғандықтан, $k=0$ және жанаманың теңдеуі $y=0$.

в) $y=|x|$, $x_0=0$.

б)



в)



Оң жақ жанамасы $y=x$ болады, яғни $f'_{пр}=1$, ал сол жағынан жанамасы $y=-x$, яғни $f'_{л}=-1$. Бұдан, x=0 нүктесінде берілген $y=|x|$

функцияның туындысы табылмайды, бұл функция x=0 нүктесінде үзіліссіз болғанның өзінде.

$f'_{пр} \neq f'_{л}$ болатын нүктелер бұрыштық деп аталады.

Теоремалар.

1. Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданатын болса, онда бұл функция осы нүктеде үзіліссіз.

Шынымен де, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x)$, мұндағы $\alpha(x) \to 0$, егер $\Delta x \to 0$.

Бұдан, $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x \to 0$ егер $\Delta x \to 0$.

Дифференциалдау ережелері

1. $u'(x)$ және $v'(x)$ табылсын, ал C - const. Онда

а) $C' = 0$. Шынында да, $f(x) = C \Rightarrow \Delta f = 0 \Rightarrow C' = 0$.

б) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

в) $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow (Cu)' = Cu'$.

г) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Туындының кестесі

$u = u(x)$, $v = v(x)$ - x айнымалысына тәуелді функциялар, ал C, a, α - тұрақты сандар болсын. Онда

1. $x_x' = 1$

2. $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha - 1} \cdot u'$

3. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

4. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

5. $(tg\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

6. $(ctg\, u)' = \frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

7. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

8. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

9. $(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

10. $(arcctg\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

11. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u' \Rightarrow (e^u)' = e^u \cdot u'$

12. $(\log u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u' \Rightarrow (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

13. $(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'$

3-формуланың дәлелдеуін келтірелік.

Мысал 2. Берілген функциялардың туындыларын тап

а) $y = x^3$. 2-формуладан $u(x) = x$, $\alpha = 3 \Rightarrow y' = 3x^{3-1} \cdot x' = 3x^2$.

б) $y=\sqrt[3]{x^2}$. $y=x^{2/3}$ .2-формуладан

$$u(x)=x,\ \alpha=\frac{2}{3}\Rightarrow y'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}\cdot x'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

в) $y=\dfrac{1}{x^2}$. $y=x^{-2}$. 2-формуладан

$$u(x)=x,\ \alpha=-2\Rightarrow y'=-2x^{-2-1}\cdot x'=-2x^{-3}=\frac{-2}{x^3}.$$

г) $y=2^{x^3}$.

$$a=2,\ u=x^3,\Rightarrow y'=2^{x^3}\cdot\ln 2\cdot\left(x^3\right)'=2^{x^3}\cdot\ln 2\cdot 3x^2=2^{x^3}\cdot 3x^2\ln 2.$$

д) $y=\sin^2 x^3=\left[\sin x^3\right]^2$.

$$u=\sin x^3,\ \alpha=2\Rightarrow y'=2\left(\sin x^3\right)^{2-1}\cdot\left(\sin x^3\right)'\Rightarrow$$

$$u=x^3\Rightarrow 2\sin x^3\cdot\cos x^3\cdot\left(x^3\right)'=3x^2\sin 2x^3.$$

е)

$$y=\cos x\cdot\left(1+x^2\right)\Rightarrow y'=\left(\cos x\right)'\cdot\left(1+x^2\right)+\cos x\cdot\left(1+x^2\right)'=-\sin x\cdot\left(1+x^2\right)+\cos x\cdot\left[1'+\left(x^2\right)'\right]=$$

$$=-\sin x\cdot\left(1+x^2\right)+2x\cos x.$$

Функция дифференциалы және оны жуықтап есептеуге қолдану. Дифференциалданатын функциялар қасиеттері. Жанама мен нормаль теңдеулері. Дифференциалдық есептеудің негізгі теоремалары.

Функция дифференциалы.

Анықтама 4. x_0 нүктесінің аймағында анықталған $y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі өсімшесі

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x, \qquad (**)$$

түрінде көрсетілсе, онда x_0 нүктесінде $y=f(x)$ функциясы дифференциалданады деп аталады.

$A\cdot\Delta x$ - функция өсімшесінің сызықты бөлігі, ал $\Delta x\to 0$ үшін $\alpha\to 0$ шексіз аз шама.

$A\cdot\Delta x$ - сызықты бөлігі функция дифференциалы деп аталады.

Белгілеуі: $dy=A\cdot\Delta x$. x тәуелсіз айнымалысы үшін $dx=\Delta x$, ендеше $dy=A\cdot dx$.

Дифференциалданатын функция қасиеттері:

1.(*Берілген нүктеде функция дифференциалдануы мен үзіліссіздігінің арасындағы байланыс.*) Функция қандай да бір x_0 нүктесінде дифференциалданатын болса, онда үзіліссіз.

2.(*Берілген нүктеде функция дифференциалдануы мен туындысының бар болуының арасындағы байланыс.*) Функция қандай да бір x_0 нүктесінде дифференциалдануы үшін осы нүктеде туындысының бар болуы қажетті және жеткілікті шарт және $dy = f'(x_0)\cdot dx$.

$\Delta y = A\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$ функция өсімшесінің теңдігіндегі α шамасы $\Delta x \to 0$ шексіз аз шама екендігін ескеріп, (*) және (**) теңдіктерінен

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$$

дифференциалды жуықтап есептеуге қолдану формуласын аламыз.

Мысал 1. $y=\sqrt{4{,}001}$ есепте.

Шешуі: $y=\sqrt{x}$ функциясын қарастыралық және $x=4$ деп алайық. $x+\Delta x$ ретінде $4{,}001$ санын аламыз. Онда $\Delta x = 0{,}001$,

$f(4)=2$.

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=0{,}25$. Онда (5)-тен

$f(4{,}001)\approx 0{,}25\cdot 0{,}001+2=2{,}0025$

Дифференциалдау ережелері.

$u'(x)$ және $v'(x)$ табылсын, ал C - const. Онда

а) $C'=0$.

б) $(u\pm v)'=u'\pm v'$.

в) $(uv)'=u'v+uv' \Rightarrow (Cu)'=Cu'$.

г) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Бұл ережелер $u(x)$ және $v(x)$ функцияларының дифференциалданатын жағдайында да орындалады.

а) $dC=0$.

б) $d(u\pm v)=du\pm dv$.

в) $d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv \Rightarrow d\left(Cu\right) = C \cdot du$.

г) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.

Дифференциалдық есептеудің негізгі теоремалары.

Ферма теоремасы: f функциясы АВ аралығында анықталған болсын және $\xi \in (a;b)$ нүктесінде $(a;b)$ аралығындағы ең үлкен немесе ең кіші мәнін қабылтасын.

Егер $\xi \in (a;b)$ нүктесінде туындысы бар болса, ол нөлгетең. $f'(\xi) = 0$

Ролль теоремасы:

f функциясы : 1. $[a;b]$ сегментінде үзіліссіз;

2. $(a;b)$ аралығының әр нүктесінде туындысы бар;

3. интервалдың шекараларында мәні $f(a) = f(b)$

Онда $[a;b]$ аралығынан ξ нүктесі табылып, $f'(\xi) = 0$ болады.

Лагранж теоремасы: f функциясының $[a;b]$ аралығының әр нүктесінде туындысы бар болса, $[a;b]$ аралығынан ξ нүктесі табылып, $f(a) - f(b) = f'(\xi) \cdot (b - a)$

Геометриялық түрде $f'(\xi)$ - $(a; f(a))$; $(b; f(b))$ нүктелері арқылы жүргізілген хорданың бұрыштық коэффициенті.

Коши теоремасы: f және g функциялары

1. $[a;b]$ аралығында үзіліссіз;

2. аралықтың әр нүктесінде туындысы бар;

3. аралықтың әр нүктесінде g функциясының туындысы нөлге тең емес.

Онда $[a;b]$ аралығынан ξ нүктесі табылып, ол келесі қанағаттандырады:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Жанама мен нормаль теңдеулері.

Егер $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде туындысы бар болса, онда қисыққа жүргізілген жанама теңдеуі: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Егер $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде туындысы бар болса, онда қисыққа жүргізілген нормаль теңдеуі: $y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0$.